

УДК 691.694.012

Дорофєєв В.С., д.т.н., проф.,
Зінченко Г.В., асп., ОДАБА, м Одеса

ЧИСЕЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ, ЩО ХАРАКТЕРИЗУЮТЬ ПОЧАТКОВУ СТАДІЮ РОБОТИ КОМПОЗИТИВ

У статті описані чисельні дослідження появи зародкових тріщин на межах включень у бетоні. Як відомо, бетони відносяться до композиційних будівельних матеріалів, властивості яких формуються у результаті складних процесів взаємодії початкових складових, з утворенням трансформованих в часі структур і внутрішніх поверхонь розділу здатні до утворення та розвитку технологічних тріщин. Технологічні тріщини матеріалу визначають пошкодженість конструкцій технологічними дефектами, що, у свою чергу, обумовлює їх експлуатаційну надійність. Кожен вид дефектів має власну історію розвитку і проходить певні етапи: від зародження до перетворення на тріщину, що безповоротно розвивається. Спрямована зміна початкової (технологічної) пошкодженості дозволить об'єктивніше оцінювати властивості матеріалу, змінювати його в необхідному напрямі та прогнозувати роботу матеріалу в конструкції з урахуванням умов її експлуатації.

Ключові слова: бетон, зародкові тріщини, напруга, розподіл напруги, пружні ядра

Вступ. Відомо, що до причин утворення тріщин на поверхні бетону відносять пластичну усадку [1, 2], яка відбувається протягом перших декількох годин після укладання, поки бетон ще знаходиться в пластичному стані. Вірогідність виникнення тріщин з цієї причини залежить від інтенсивності водовідокремлення і випару води від

бетонної суміші. Фізико-механічні властивості матеріалів (бетонів) значною мірою залежать від міри дефектності їх структури [3-5].

Аналіз останніх досліджень. Нижче розглядається початкова стадія роботи бетону в процесі формування цементного каменю і появи усадкової напруги, причому концентрація напруги відбувається на включеннях. Під включенням розумітимемо область зі зміненими властивостями. Це дозволяє використати співвідношення лінійної теорії пружності для кусочно-однорідного тіла без розривів і тріщин. Надалі досліджуватимемо тільки двовимірні розподіли напруги: плоский або плоский напружений стан. З одного боку, ці випадки широко поширені в практиці проектування, а з іншого, - для опису двовимірного напруженого стану в математичній теорії пружності розвинений виключно потужний математичний апарат - апарат теорій аналітичних функцій комплексного змінного, уперше застосованого Колосовим Г.В. і розвиненого Мусхелішвілі Н.І. [6] (рис 1).

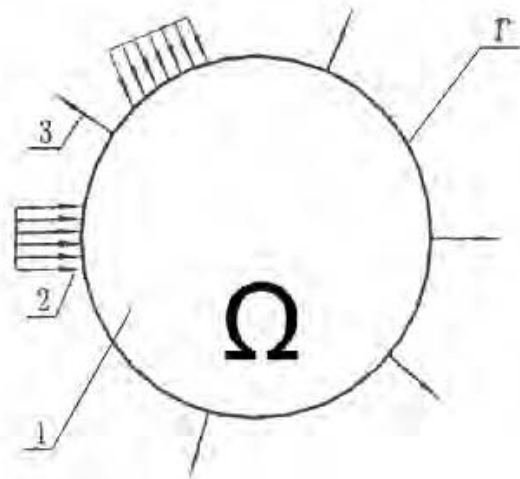


Рис. 1 Розрахункова модель однорідного матеріалу: 1 - однорідний матеріал з межею Γ ; 2, 3 - розподілене і зосереджене навантаження

Мета досліджень. Отримати чисельні результати, що характеризують початкову стадію роботи композитів для будь-яких характеристик матеріалів, форм включень та зовнішніх дій за допомогою апарату

теорій аналітичних функцій комплексного змінного.

Методика та результати досліджень. Рішення поставлених завдань зводиться до визначення двох функцій $\varphi(z)$ та $\psi(z)$ комплексного змінного $z=x+iy$. Компоненти напруженого стану виражаються через $\varphi(z)$ та $\psi(z)$ за допомогою співвідношень:

$$\begin{aligned}\sigma_x + \sigma_y &= 4\operatorname{Re} \varphi'(z) \\ \sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} &= 2[\bar{z}\varphi''(z) + \overline{\psi'(z)}]\end{aligned}\quad (1)$$

$\operatorname{Re} \varphi'(z)$ – матеріальна частина аналітичної функції $\varphi(z)$. А переміщення:

$$2\mu(u - iv) = x\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \quad (2)$$

Визначення шуканих функцій здійснювалося за допомогою системи функціональних рівнянь:

$$\begin{aligned}\frac{x}{\mu}\varphi(t^{(m)}) - \frac{1}{\mu}\left[t^{(m)}\overline{\varphi'(t^{(m)})} + \overline{\psi(t^{(m)})}\right] - \frac{x_0}{\mu_0}\varphi_m(t^{(m)}) + \\ + \frac{1}{\mu_0}\left[t^{(m)}\overline{\varphi'_m(t^{(m)})} + \overline{\psi_m(t^{(m)})}\right] &= g(t^{(m)}), \\ g(t^{(m)}) &= g_1(t) + ig_2(t); \\ t^{(m)} \in \Gamma^{(m)}; m &= 0, 1, \dots\end{aligned}\quad (3)$$

Підкреслимо, що $g(t)$ задає величину зміщення, яку слід задати в точці $t^{(m)}$ ядра $\Omega^{(m)}$, щоб поєднати її з точкою $t^{(m)}$ елемента межі $\Gamma^{(m)}$ області Ω , коли остання знаходиться в недеформованому стані. Наприклад, у разі рівномірної усадки кругових пружних ядер початковим радіусом R у отворі одиничного радіусу $g(t^{(0)}) = (R-1)e^{i\theta}$, θ – полярний кут точки $t^{(0)}$ у системі координат, пов'язаній з центром отвору.

Окрім умов (3), для кожного елемента межі Γ повинні виконуватися умови рівноваги, які призводять до другого функціонального рівняння:

$$\begin{aligned}\varphi(t^{(m)}) + t^{(m)}\overline{\varphi'(t^{(m)})} + \overline{\psi(t^{(m)})} - \varphi_m(t^{(m)}) - \\ - t^{(m)}\overline{\varphi'_m(t^{(m)})} - \overline{\psi_m(t^{(m)})} &= 0\end{aligned}\quad (4)$$

Система рівнянь (3) і (4) сумісно з (2) надає змоги визначити $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\psi_m(z)$,

($m=0, 1, \dots, n-1$) по заданих $g(t)$ та умовам на нескінченності.

Максимальна тангенціальна напруга $\tau_{\max}$ і головна напруга σ_1 та σ_2 у точці z з Ω виражаються через комплексні потенціали $\varphi(z)$ і $\psi(z)$.

$$\tau_{\max} = [\bar{z}\varphi'(z) + \psi'z], \quad (5)$$

$$\sigma_1 = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} + [\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)], \quad (6)$$

$$\sigma_2 = \varphi'(z) + \overline{\varphi'_1(z)} + [\bar{z}\varphi''_1(z) + \psi'_1z], \quad (7)$$

В якості моделі, що описує розподіл напруги в композиті, розглядається нескінченне ізотропне пружне тіло з регулярним кільцем кругових включень. Тому їх можна представити як пружні ядра з рівними ефективними характеристиками. Пружні властивості матеріалів ядер і матриць відрізняються один від одного і описуються модулем пружності і коефіцієнтом Пуассона ν або константами Ляме λ та μ , які пов'язані з E та ν співвідношеннями:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{ та } \mu = \frac{E}{2(1-\nu)}.$$

Окрім них вводиться пружна постійна:

$$x = \frac{3-\nu}{1-\nu}$$

Досліджується розподіл напруги в композиті, обумовлений скачками переміщень на межах ядер. Тим самим моделюються усадкові явища, що відбуваються як в матеріалі матриці, так і в матеріалі ядер. Вважатимемо, що при будь-яких деформаціях тріщини між ядрами і матрицею не виникають, а центри тяжіння ядер співпадають з центрами тяжіння відповідних площин в матриці (рис. 2).

Позначимо Ω – перетин комплексної площини xOy з матрицею Ω_r ($r=0, 1, \dots, n-1$) – область, займана r -м Γ_r ($r=0, 1, \dots, n-1$) – межа між ядром Ω_r та областю Ω (рис.3).

При рішенні системи функціональних рівнянь, для циклічно симетричної області застосуємо загальний метод обліку симетрії середовища, розроблений М.Л. Буришкіним [7]. Початкове завдання розпадається на декілька узагальнених симетричних завдань.

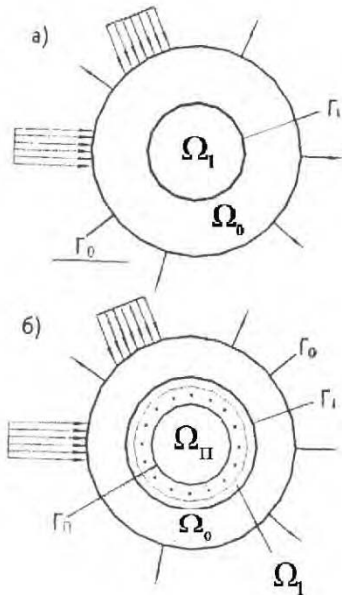


Рис. 2. Розрахункова модель неоднорідного матеріалу: а – наявність парної межі; б – випадок плавної зміни властивостей

Нехай система координат $x'Oy'$ отримана з xOy поворотом на кут τ . Тоді компоненти напружено-деформованого стану в новій системі координат визначаються співвідношеннями:

$$\begin{aligned}\sigma'_x + \sigma'_y &= 4\operatorname{Re}\varphi'(z) \\ \sigma'_y - \sigma'_x + 2i\tau_{xy} &= 2[z\varphi''(z) + \psi'(z)]e^{2i\theta} \\ 2\mu(U' - iV') &= [z\varphi(z) - z\varphi'(z) - \psi(z)]e^{-i\theta}\end{aligned}\quad (8)$$

Співвідношення (8) придатні для відшукування напруги і зміщень в полярній системі координат. у полярній системі координат. При цьому, $\bar{b}_x' = \bar{b}_r$, $\bar{b}_y' = \bar{b}_\theta$, $\tau_{x'y'} = \tau_{r\theta}$, $u' = u_r$, $v' = u_\theta$, θ – полярний кут.

Функцію $\varphi(z)$ та $\psi(z)$, що описує напружено-деформований стан матриці Ω , відшукуватимемо у вигляді:

$$\varphi(z) = \varphi^*(z) + \bar{\varphi}(z), \quad \psi(z) = \psi^*(z) + \bar{\psi}(z),$$

де: $\varphi(z)$ та $\psi(z)$ описує напружено-деформований стан без отворів під дією навантажень, прикладених на нескінченності, а $\varphi^*(z)$ та $\psi^*(z)$ збурювання, що вноситься отворами і зникає на нескінченності.

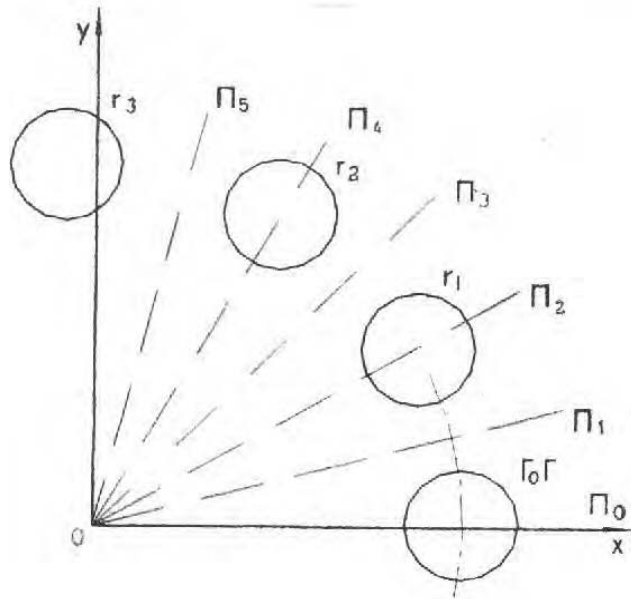


Рис. 3. Модель розрахунку з регулярним кільцем кругових включень

Для площини, що випробовує розтягування зусиллями P уздовж осі Ox :

$$\varphi(z) = P_z / 4; \quad \psi(z) = -P_z / 2$$

Рішення узагальненої циклічної задачі зводиться до знаходження функцій:

$$\Phi^{(p)}(z), \psi^{(p)}(z), \varphi'_{vp}(z), \psi'_{vp}(z), \quad \text{з рівнянь:}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{vp}(t) + t\overline{\varphi'_{vp}(t)} + \overline{\varphi_{vp}(t)} - \varphi_{vp}^{(e)}(t) - t\overline{\varphi_{vp}^{(e)}(t)} - \\ - \overline{\varphi_{vp}^{(e)}(t)} = P_{vp}(t); \\ \chi\varphi_{vp}(t) - \frac{1}{\mu} \left[t\overline{\varphi_{vp}^{(e)}(t)} + \overline{\psi_{vp}(t)} \right] - \frac{\chi}{\mu_1} \varphi_{vp}^{(e)}(t) + \\ + \frac{1}{\mu_1} \left[t\overline{\varphi_{vp}^{(e)}(t)} + \overline{\psi_{vp}^{(e)}(t)} \right] = g_{vp}(t); t \in \Gamma_0\end{aligned}\quad (9)$$

Приймаючи

$$\begin{aligned}\Phi^{(p)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{kp} (z-e)^{-k}; \quad \psi^{(p)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{kp} (z-e)^{-k} \\ \varphi_{kp}^{(e)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{kp} (z-e)^k; \quad \psi^{(e)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} B_{kp} (z-e)^k\end{aligned}$$

Методом рядів (7) система (9) зводиться до нескінченної системи лінійних рівнянь алгебри відносно невідомих коефіцієнтів a_{kp} , b_{kp} , A_{kp} , B_{kp} ($k=1,2,\dots$, $p=1,2$), яка вирішується методом редукції.

Оскільки спочатку прийнято, що структура конструкцій складається із структурних елементів різного масштабного рівня [3], то можна припустити, що під дією зовнішніх дій у бетоні на одному з рівнів неоднорідностей відбуваються структурні зміни. Це викликає локальні зміни властивостей матеріалів конструкції. В зв'язку з цим можна допустити, що в тілі виникла область Ω_1 , властивості якої відрізняється від властивостей матеріалів області Ω_0 (рис. 2а). Тоді область Ω_1 можна розглядати як включення в Ω_0 . Напружений стан складеного тіла описуватиметься двома параметрами комплексних функцій $\varphi_0(z)$ і $\psi_0(z)$ ($z \in \Omega_0$) – для основного матеріалу і $\varphi_1(z)$ та $\psi_1(z)$ ($z \in \Omega_1$) – для включення.

На межі контакту повинні виконуватися умови рівноваги і умови безперервності переміщень.

$$\overline{\varphi_0(t)} + \bar{t} \varphi_0'(t) + \psi_0(t) = f(t), (t \in \Gamma_0) \quad (10)$$

$$\overline{\varphi_0(t)} + \bar{t} \varphi_0'(t) + \psi_0(t) = \overline{\varphi_1(t)} + t \varphi_1'(t) + \psi_1(t), (t \in \Gamma_0) \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\chi_0}{\mu_0} \varphi_0(t) - \frac{1}{\mu_0} [t \varphi_0'(t) + \psi_0(t)] = \\ & = \frac{\chi_0}{\mu_0} \varphi_1(t) - \frac{1}{\mu_1} [t \varphi_1'(t) + \psi_1(t)]; (t \in \Gamma_1) \end{aligned} \quad (12)$$

У формулах (10) - (12) передбачається наявність межі між основним матеріалом і включенням. У разі плавної зміни властивостей (на макрорівні) період можна описати декількома концентричними контурами, між якими властивості матеріалу передбачаються однаковими (рис. 2б). У цьому випадку вводиться $(n+1)$ пара комплексних функцій, де φ_0 і ψ_0 описують напружений стан нового матеріалу, φ_i та ψ_i ($i=1, 2, \dots, n-1$) – напружений стан концентричних областей Ω_i , а φ_n та ψ_n – напружений стан внутрішнього ядра. Усі ці функції можуть бути знайдені з системи рівнянь аналогічно (10)-(12), у яких умови рівноваги і безперервності записуються для кожного контуру.

При заданих стрибках зміщень стани об'єкту визначаються шістьма

параметрами: пружними характеристиками матеріалу матриці χ та μ , матеріалу ядер χ_0 та μ_0 і геометричними параметрами області n та a . В ході розрахунків фіксувалися параметри матеріалів матриці ($\chi=2, \mu=0,4$), що відповідає одиничному модулю пружності і коефіцієнту Пуассона 0,3, і в широкому діапазоні мінялися n, a, χ_0, μ_0 . Аналіз числових результатів показує, що при $0,01 < \mu/\mu_0 < 1,00$ розподіл напруги на основному контурі мало відрізняється від рівномірного з інтенсивністю $\sigma = 2\mu / (2\mu - 1)$.

Характер розподілу напруги на суміжному контурі визначається величиною $\chi/\chi_1 > 1$ картина розподілу напруги на суміжному контурі така ж, як у разі однакових матеріалів площини і ядер, а при $\chi/\chi_1 > 1$ епюра σ_θ на контурі Γ_0 змінює знак.

Порівняння максимальних значень σ_θ на Γ_0 та Γ_1 дає можливість зробити висновок про малий взаємний вплив суміжних ядер при $10^{-2} < \mu/\mu_0 < 10^2$.

Таким чином, при аналізі причин розвитку технологічних тріщин цілком адекватною моделлю може служити нескінченна площа з одним включенням. Оскільки, в процесі розвитку тріщина йде з меж контакту, то для опису процесу розвитку тріщини допустимо прийняти як модель однорідну площину, на однорідний напружений стан якої накладається поле напруги, що породжується самою тріщиною.

Як приклад на рис. 4 зображені епюри напруги σ/μ на контурах кільця з п'ятьма абсолютно жорсткими ядрами. Коефіцієнт Пуассона матеріалу матриці прийнятий 0,3. Лінії 1 і 2 відповідають значенням ширини перемички між отворами, відповідно, $a=0,3$ та $a=0,7$. Штриховою лінією показана одинична епюра об'єкту.

У ході обчислень фіксувалися параметри матеріалу матриці ($\chi=2, \mu=0,4$), що відповідає матеріалу з одиничним модулем пружності і коефіцієнтом Пуассона 0,3. У широких межах змінилися геометричні параметри конструкції n та a і параметри χ_0 та μ_0 матеріалу ядер.

Характерні епюри σ_θ наведені на рис. 5.

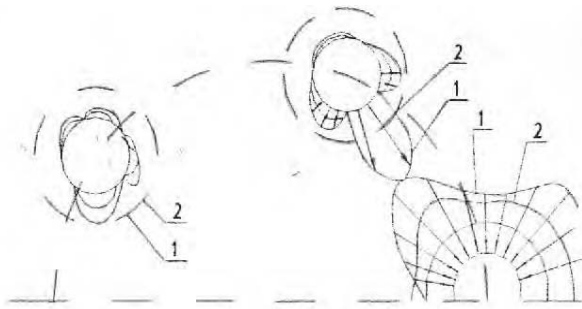


Рис. 4. Епюри напруги на контурі кільця :
1 – ширина перемички між отворами $a=0,3$;
2 – ширина перемички між отворами $a=0,7$

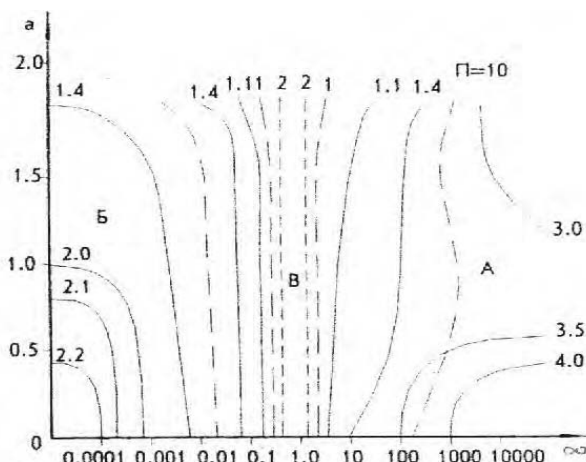


Рис. 5. Номограма коефіцієнта концентрації напруги при розтягуванні нескінченної площини: А – розтягування площини з кільцем отворів; Б – те ж, з кільцем абсолютно жорстких ядер; В – розтягування суцільної площини.

Практично в усіх випадках максимальна концентрація напруги досягається на основному контурі. Лінії рівня коефіцієнта концентрації напруги $k = \sigma_{\text{max}} / \bar{\sigma}$ залежно від властивостей матеріалу і геометричних параметрів області зображені на рис. 5.

Велика кількість параметрів ускладнює використання таблиць в практичних обчисленнях. Проте, дане завдання має три прості випадки: А – розтягування площини з кільцем отворів, Б – з кільцем абсолютно жорстких ядер, В – розтягування суцільної площини.

Висновки.

1. Проведений чисельний експеримент дав можливість зробити висновок, що при

твердненні грубогетерогенних матеріалів (бетонів) виникає нерівномірне поле деформацій, яке призводить до концентрації напруги на межі включень і появи зародкових тріщин.

2. При аналізі причин розвитку технологічних тріщин адекватною моделлю може служити нескінченна площа з одним включенням.

3. При зовнішніх діях на бетон на мікро- та макро-рівнях і внаслідок усадкових явищ в ньому на межах включень виникає концентрація напруги, яка може перерости в тріщини. Початкові (технологічні) тріщини залежать від складу бетону, інтенсивності водовідокремлення і випару води [2] і можуть досягати ширини розкриття 2 мм.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ:

1. Руководство для проектировщиков к еврокоду 2 : Проектирование железобетонных конструкций : Общие правила и правила для зданий : EN 1992-1-1 : перевод с английского / Э. В. Биби, Р. С. Нараянан. – Изд. 2. – М., 2013. – 291 с.
2. Соломатов В. И. Композиционные строительные материалы и конструкции пониженной материалоемкости / В. И. Соломатов, В. С. Дорофеев, В. Н. Выровой, А. В. Сиренко. – К. : Будівельник, 1991. – 144 с.
3. Beeby A. W. Concrete in the Oceans: cracking and Corrosion. Report №2 : CIRIA Underwater Engineering Group. – London, 1978.
4. Laboratory studies and calculations on the influence of chloride-induced corrosion of steel in concrete / P Schiessl and M. Ranpach // AC Materials Journal. 94. – 1997. – p. 56-62.
5. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1976. – 707 с.
6. Бурышкин М. Л. Эффективный метод решения задач термоупругости для дисков циклической структуры / М. Л. Бурышкин, Э. А. Тропп, В. П. Шупта // АН СССР, ФТН А.Р. Йоффе, 1336. – Л., 1989.

REFERENCES:

1. Bibi, E. V., & Narayanan, R. S. (2013). The manual for designers to Eurocode
- 2 : The design of reinforced concrete constructions: General rules and rules for buildings : EN 1992-1-1. Moscow, Russia. [in Russian]. 2. Solomatov, V. I., Dorofeev, V. S., Virivoi, V. N., & Sirenko, A. V. (1991). The composite building materials and constructions of lowered material consumption. Kyiv, Ukraine : A builder, 144
3. Beeby, A. W. (1978). Concrete in the Oceans: cracking and Corrosion. Report №2: CIRIA Underwater Engineering Group. London, England.
4. Schiessl, P., & Ranpach M. (1997). Laboratory studies and calculations on the influence of chloride-induced corrosion of steel in concrete. AC Materials Journal. 94, 56-62.
5. Mushelishvili, N. I. (1976). Some basic tasks of mathematical theory of elasticity. Moscow, Russia : Science, 707
6. Burishkin, M. L., Tropp, E. A., & Shupta, V. P. (1989). The effective method of the rmoelectricity solving tasks for the disks of cyclic structure. ASUSSR, Leningrad, 1336.

АННОТАЦИЯ

В статье описаны численные исследования появления зародышевых трещин на границах включений в бетоне. Как известно, бетоны относятся к композиционным строительным материалам, свойства которых формируются в результате сложных процессов взаимодействия исходных составляющих, с образованием трансформируемых во времени структур и внутренних поверхностей раздела способные к образованию и развитию технологических трещин. Технологические трещины материала определяют поврежденность конструкций технологическими дефектами, что, в свою очередь,

предопределяет их эксплуатационную надежность. Каждый вид дефектов имеет собственную историю развития и проходит определенные этапы: от зарождения до превращения в необратимо развивающуюся трещину. Направленное изменение начальной (технологической) поврежденности позволит более объективно оценивать свойства материала, изменять его в требуемом направлении и прогнозировать работу материала в конструкции с учетом условий её эксплуатации.

Ключевые слова: бетон, зародышевые трещины, напряжение, распределение напряжения, упругие ядра.

ANNOTATION

In the article numerous investigations of germinal cracks appearance on the boundaries of inclusion into concrete are highlighted. As we know, concretes refer to composite building materials, the properties of which are formed as a result of complex processes of original composites interaction, with forming of the transported in time structures and the inner surfaces of a section capable to technological cracking formation and development. Technological cracking of a material defines the damage of constructions by technological defects that, in its turn, predetermine their reliability for exploitation. Each kind of defects has its own history of development and passes through the definite stages: from the germination to the turning into an irreversible developing crack. The directed change of the initial (technological) damage allows to appreciate the material's property more objectively, to change it in the required direction and to forecast the material's work in the construction, taking into account the conditions of its exploitation.

Keywords: concrete, embryonic cracks, tension, distribution of tension, resilient kernels.